CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a IX-a

1. Se consideră funcţia f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - a$, $a \in(0, \infty)$.

1) Demonstraţi că soluţiile ecuaţiei $\left||f(x)|-2a\right|=2a, a\in(0,\infty)$ sunt în progresie aritmetică.

2) Demonstraţi că dacă există u şi v diferite astfel încât $|f(u)-f(v)|\le 2$, atunci $|u-v|\le 1$.

3) Demonstraţi că dacă M este o mulţime cu 3 elemente astfel încât $M\subset[2010,2012]$ atunci există cel puţin două elemente x şi y aparţinând mulţimii M astfel încât $|f(x)-f(y)|\le 2$

Soluţie:

1) Obţine soluţiile $x_1=\frac{-3a}{2}, x_2=\frac{a}{2}, x_3=\frac{5a}{2}$ 2p

Verifică $x_1 + x_3 = 2x_2$ 1p

2) Obţine $|f(u)-f(v)|\le 2 \Leftrightarrow |2u-2v|\le 2 \Leftrightarrow |u-v|\le 1$ 2p

3) Mulţimea având 3 elemente într-un interval de lungime 2 rezultă, conform principiului cutiei, că există cel puţin două dintre ele într-un interval de lungime 1 .... 1p

Dacă x, y sunt elementele anterioare atunci $|x-y|\le 1 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|\le 2$ 1p

2. Avem la dispoziţie 2012 pătrate 3×3, împărţite fiecare în câte 9 „pătrăţele” 1×1 prin drepte paralele cu laturile pătratului iniţial şi notate P_1, P_2, ..., P_{2012}. În fiecare dintre pătratele iniţiale se completează pătrăţelele din colţuri şi apoi cel din centru, începând cu pătrăţelul din colţul dreapta jos, în sens trigonometric, cu numerele naturale nenule distincte, în ordinea naturală (1, 2, 3, …).

a) Ce număr se va afla în centrul pătratului P_3 ?

b) Câte numere naturale se vor utiliza pentru completarea celor 2012 pătrate iniţiale ?

c) Care este poziţia pe care se va afla numărul 2012 ?

Soluţie:

a) În orice pătrat se află 5 numere distincte 1p

În centrul pătratului P_3 se va afla numărul 15 .... 1p

b) Fiecare pătrat conţinând 5 numere naturale distincte vom folosi 2012 × 5 = 10060 numere 2p

c) Cu primele 2010 numere natural distincte completăm 402 pătrate 2p

Numărul 2012 se va găsi în P_{403} în coltul dreapta sus 1p

3. a) În paralelogramul ABCD cunoaştem că $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

Demonstraţi că paralelogramul este un dreptunghi.

b) Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge 6$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului iar p este semiperimetrul triunghiului.

Soluţie:

a) Obţine $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$, $\left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$ 2p

Din relaţia $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|$ deducem că ABCD este dreptunghi (având diagonalele congruente) 2p

b) Notăm x = p - a, y = p - b , z = p - c şi obţinem a = y + z, b = x + z şi c = x + y 1p

Aduce inegalitatea la forma $\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x}\geq 6$ 1p

Finalizare 1p

4. O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăţi având ariile S_1, S_2, S_3, S_4 (vezi figura alăturată).

a) Demonstraţi că $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

b) Cunoscând că $S_2 = 300cm^2$, $S_3 = 180cm^2$, $S_4 = 120cm^2$, determinaţi suprafaţa iniţială a tablei.

S_1	S_2
S_4	S_3

<u>Soluţie:</u>

a) Notăm $S_1 = a\cdot x, S_2 = a\cdot y, S_3 = y\cdot b, S_4 = b\cdot x$ 2p

Verificare $S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4$ 2p

b) Obţine $S_1 = 200\ cm^2$ 2p

Finalizare: Suprafaţa iniţială va fi de $800\ cm^2$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5^x + \lg x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Comparaţi numerele $a=\sqrt{5}-\lg 2$ şi $b=\sqrt[3]{5}-\lg 3$.

Soluţie:

a) Funcţia $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = 5^x$ este strict crescătoare 1p

Funcţia $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x) = \lg x$ este strict crescătoare 1p

Funcţia $f = g + h$ este strict crescătoare 2p

b) Avem : $a = 5^{\frac{1}{2}}+\lg\frac{1}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)$ şi $b=5^{\frac{1}{3}}+\lg\frac{1}{3}=f\left(\frac{1}{3}\right)$ 2p

Deoarece $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$, cum funcţia f este strict crescătoare, deducem că $a > b$ 1p

2. Ştefan vrea să citească o carte care are 381 de pagini. El îşi propune să citească în prima zi un număr întreg de pagini, apoi în fiecare zi, să citească un număr de pagini egal cu dublul numărului de pagini citite în ziua precedentă. Câte pagini a citit în prima zi şi în câte zile a terminat de citit cartea, ştiind că a citit cel puţin două zile ?

Soluţie:

Fie a numărul de pagini citite în prima zi, iar n numărul de zile în care va fi citită cartea 1p

Numărul de pagini citite în cele n zile va fi $a + 2a + 2^2a + ... + 2^{n-1}a$ 2p

Avem relaţia $a + 2a + 2^2a + ... +2^{n-1}a = a\cdot(2^n-1)$, deci $a\cdot(2^n-1) = 381$ 1p

Deducem că $a\in\{1, 3, 127, 381\}$ 1p

Găsim soluţiile: $a = 3$ şi $n = 7$, respectiv $a = 127$ şi $n = 2$ 2p

3. Se consideră numărul $a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, unde z este un număr complex de modul 1.

a) Să se demonstreze că $a=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$.

b) Determinaţi valoarea maximă a numărului a .

c) Determinaţi numărul complex z, pentru care a=4.

Soluţie:

a) Avem: $\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{z\cdot\bar{z}}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 2p

$a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\overline{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$ 1p

b) Deoarece $\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\le|z|+\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1+1=2$, deducem $a\le 4$ 1p

c) Dacă z = x + iy, avem: $\left|x+\frac{1}{2}+i\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2=4$, cu $x^2+y^2=1$ 1p

Găsim $x+y\sqrt{3}=2$ 1p

Obţinem soluţia $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1p

4. Fie sumele următoare: $S_1=C_{100}^0+2C_{100}^2+2^2C_{100}^4+...2^{50}C_{100}^{100}$ şi

$S_2=C_{100}^1+2C_{100}^3+2^2C_{100}^5+...2^{49}C_{100}^{99}$

a) Demonstraţi că $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$.

b) Să se demonstreze că $0<S_1-\sqrt{2}S_2<\frac{1}{2^{100}}$.

c) Calculaţi $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

<u>Soluţie:</u>

a) Se dezvoltă cu Binomul lui Newton 1p

Deducem $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$ 1p

b) Avem $\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=S_1-\sqrt{2}S_2$ 1p

$S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}>0$ 1p

$S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}}<\frac{1}{2^{100}}$ 1p

c) Deoarece $2^{10}=1024>10^3$, avem $S_1-\sqrt{2}S_2=\left(1-\sqrt{2}\right)^{100}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}}<\frac{1}{2^{100}}<\frac{1}{10^{30}}$ 1p

Atunci $0<10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)<1$, deci $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]=0$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XI a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}7 & 10\\ -5 & -8\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice egalitatea $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$.

b) Să se determine matricea B^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se determine matricea C^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie:

a) Calculează $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ 1p

Verificarea egalităţii $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$ 1p

b) Obţine corect B^2, B^3 .... 1p

Enunţat ipoteza inductivă $B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$, $n \geq 1$ 1p

Finalizat demonstraţia prin metoda inducţiei 1p

c) Obţine corect $C^2 = A \cdot B^2 \cdot A^{-1}$ 1p

Demonstrarea completă a relaţiei $C^n = A \cdot B^n \cdot A^{-1}$ 1p

2. O unitate economică ce produce frigidere are costuri fixe anuale de 10000€ la care se adaugă câte 200 € pentru fiecare frigider produs. Preţul cu care fabricantul vinde un frigider este de 350€. Notăm cu f(n) suma, în euro, cheltuită pentru producerea a n frigidere şi cu g(n) suma, în euro, ce revine ca beneficiu fabricantului după ce vinde n frigidere.

a) Calculaţi f(100), f(200) şi determinaţi formula pentru f(n).

b) Demonstraţi că $g(60) < 0$, iar $g(70) > 0$ şi interpretaţi rezultatele, din punct de vedere al rentabilităţii activităţii.

c) Dacă fabricantul şi-a propus să realizeze un profit anual de cel puţin 30000€, ce număr de frigidere ar trebui să producă şi să comercializeze ?

Soluţie:

a) $f(100)=10000+100\cdot 200=30000€$; $f(200)=10000+200\cdot 200=50000€$ 1p

Obţine $f(n)=10000+n\cdot 200$ 2p

b) $g(60) = 60 \cdot 350 - f(60) = 21000 - 22000 = -1000 < 0$

$g(70) = 70 \cdot 350 - f(70) = 24500 - 24000 = 500 > 0$ 1p

Interpretare: *La o producţie de 60 de frigidere fabricantul merge în pierdere, pe când la o producţie de 70 frigidere începe să fie rentabilă activitatea.* 1p

c) Este necesar ca $g(n) \geq 30000$ 1p

Finalizare $n > 266$. Aşadar producând (şi vânzând) cel puţin 267 frigidere, poate obţine profitul dorit 1p

3. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor de ordinul al treilea care au toate elementele numere naturale, pe diagonala secundară au mereu numărul 1, iar suma elementelor de pe oricare linie sau coloană este 2012.

a) Daţi exemplu de o matrice din mulţimea $\mathcal{M}$.
b) Care este numărul elementelor mulţimii $\mathcal{M}$? Justificaţi răspunsul.
c) Stabiliţi dacă există matrice inversabile în mulţimea $\mathcal{M}$, care să aibă inversa tot în mulţimea $\mathcal{M}$.

Soluţie:

a) De exemplu $A=\begin{pmatrix}2011 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2011\\ 1 & 2011 & 0\end{pmatrix}$, sau orice alt exemplu corect 2p

b)Forma generală a matricelor este $B=\begin{pmatrix}x & 2011-x & 1\\ 2011-x & 1 & x\\ 1 & x & 2011-x\end{pmatrix}$, unde $x\in\{0,1,...,2011\}$
.... 2p
Numărul elementelor mulţimii este 2012 (corespunzător fiecărui x) 1p

NOTĂ!: Precizarea răspunsului, fără nici o argumentare 1p

c) Dacă ar exista o matrice A în mulţimea $\mathcal{M}$ astfel încât A^{-1} să fie tot în $\mathcal{M}$, am avea:
$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_3$. De aici şi $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ $(*)$ 1p
Însă $\det(A)$ şi $\det(A^{-1})$ sunt numere întregi pare astfel că relaţia $(*)$ este imposibilă, iar răspunsul este negativ 1p

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)\cdot e^{-x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(-f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$
b) Determinaţi numărul tangentelor la graficul funcţiei care trec prin originea sistemului de axe.
c) Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f^{(n)}(0)<3$.

Soluţie:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(-f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}\cdot e^{-1}=e^{-2}$ 2p
b) Scrie ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisa x_0, t: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 1p
Pentru ca originea să aparţină tangentei e necesar ca $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0$ 1p
Deduce că x_0 verifică relaţia $x_0^2 - x_0 - 1 = 0$, deci două tangente verifică cerinţa 1p
c) Obţine $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n+1)$ 1p
Relaţia $f^{(n)}(0)<3$ conduce la soluţia n poate fi orice număr par sau 1 .... 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XII-a

1. Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d > 0$ una faţă de cealaltă. În această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie:

$$f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Considerând legea de compoziţie definită pe mulţimea $G = (0, \infty)$, se cere:

a) Demonstraţi că legea este asociativă .

b) Cercetaţi dacă legea admite element neutru .

c) Calculaţi $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d)$.

Soluţie:

a) Obţine $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = \dfrac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3}{f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2}$ 1p

Obţine $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = \dfrac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3}{f_1f_2 + f_1f_3 + f_2f_3 - d(f_1 + f_2 + f_3) + d^2}$ 1p

b) Axioma corectă 1p

Din relaţia $f \circ e = f \Rightarrow \dfrac{f \cdot e}{f + e - d} = f \Leftrightarrow f^2 - df = 0$, deci nu există element neutru 1p

c) Obţine $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d) = d$ 3p

2. Se consideră $I(a) = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{|x - a| + 1} dx$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $I(1)$;

b) Să se demonstreze că $I(2) = 2\ln 2$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{a \to \infty} I(a)$.

Soluţie:

a) Obţine $I(1) = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln 3$ 1p

b) Obţine $I(2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3 - x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x - 1} dx = -\ln|x - 3|\Big|_1^2 + \ln|x - 1|\Big|_2^3 = 2\ln 2$ 2p

a) Daca $a \to \infty$ atunci $a > 3$, iar pentru $x \in [1, 3]$ vom avea $x < a$ 1p

Atunci $I(a) = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{a - x + 1} dx = -\ln|x - a - 1|\Big|_1^3 = \ln\left(\frac{a}{a - 2}\right)$ 2p

$\lim\limits_{a \to \infty} I(a) = \lim\limits_{a \to \infty} \ln\left(\frac{a}{a - 2}\right) = \ln 1 = 0$ 1p

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ având elementele din inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi mulţimea

$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Determinaţi n - minim cu proprietatea $A^n = I_3$.
b) Determinaţi forma matricelor din mulţimea C(A).
c) Câte matrice din C(A) au determinantul egal cu $\hat{0}$?

<u>Soluţie:</u>

a) Obţine $A^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -\hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ 1p

Pentru n = 6 vom avea $A^n = I_3$ 1p

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ află $A \cdot X$ şi $X \cdot A$ 1p

Obţine X de forma $X = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & e & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & i \end{pmatrix}$ 2p

c) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & e & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & i \end{pmatrix}$ atunci $\det(X) = a \cdot e \cdot i$

Pentru $a = \hat{0}$ vom avea 49 posibilităţi de alegere a matricei 1p

Pentru $e = \hat{0}$ vom avea 42 posibilităţi de alegere a matricei (fară $a = \hat{0}$)

Pentru $i = \hat{0}$ vom avea 36 posibilităţi de alegere a matricei (fară $a = e = \hat{0}$)

Finalizare: 127 matrice vor avea determinantul egal cu $\hat{0}$ 1p

4. Se consideră funcţia $f : (0,3) \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-3}{3}\right) + 2\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{3-x}{x}}\right)$

a) Să se determine f'(x).

b) Să se determine acea primitivă F a funcţiei f pentru care $F(1) = \frac{3\pi}{2}$.

Soluţie:

a) $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-3}{3}\right)^2}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{3-x}{x}}\cdot\left(\frac{-3}{2x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{3-x}}=0$ 3p

b) Din punctul a) rezultă că f(x) este constantă pentru orice $x\in(0,3)$ 1p

Deoarece $\lim_{x\searrow 0}f(x)=\arcsin(-1)+2\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}$, deduce ca $f(x)=\frac{\pi}{2}$. 2p

O primitivă va fi $F(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x+k$, iar primitiva căutată va fi $F(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x+\pi$ 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.